UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA Y CIRCUITOS
EC1311 TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA
SECCION 1 Profesor Orlando Sucre Rosales FECHA: 09-11-09

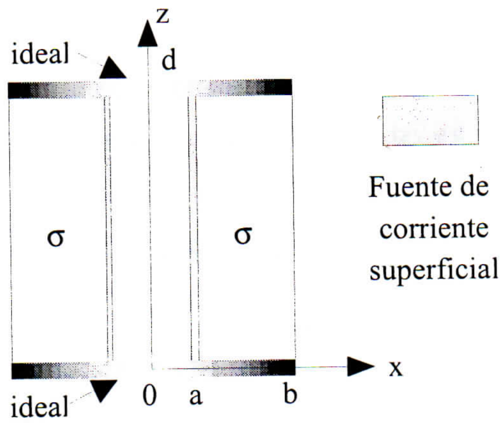
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (25 %)

NOTA: Deben justificarse **todas** las respuestas.

Problema 1 (9 p)

El dibujo muestra la sección de un sistema constituido por un material de parámetros $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 20$ S/m en el volumen $a < \rho \leq b$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < z < d$, una fuente de corriente superficial con densidad $\overline{K} = \overline{1}z K_0$ en el cilindro $\rho = a$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < z < d$, y dos discos conductores ideales, uno en $\rho \leq b$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $z = 0$ y el otro en $\rho \leq b$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $z = d$.

El resto del espacio está vacío.



a) (2 p) Determina la corriente total entregada por la fuente de corriente y la densidad de corriente en el material del volumen $a < \rho \leq b$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < z < d$.
b) (5 p) Determina $\overline{H}$ dentro del sistema, usando las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.
c) (2 p) Determina las densidades de corriente superficial en los discos metálicos.

Problema 2 (6 p)

Se tiene un imán permanente de forma toroidal en el volumen $a < \rho < b$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < z < a$. En su interior existe una densidad de magnetización $\overline{M} = \overline{1}\phi M_0 (a / \rho)$, afuera hay aire.

a) (3 p) Determina las densidades de corriente equivalentes del modelo amperiano.
b) (3 p) Determina $\overline{H}$ dentro del imán, usando las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

Problema 3 (8 p)

Se tiene un condensador de placas paralelas en el volumen $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $0 < z < a$. En su interior hay dos materiales: uno con parámetros $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 0$ en $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $0 < z < a/2$, y otro con parámetros $\varepsilon = 4\varepsilon_0 z / a$, $\mu = \mu_0$ y $\sigma = 0$ en $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $0 < z < a/2$. Se establece una diferencia de potencial V entre las placas, con la inferior conectada a tierra.

a) (5 p) Halla $\overline{E}$ y $\overline{D}$ dentro del condensador, usando las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.
b) (2 p) Determina la capacitancia por unidad de área del condensador.
c) (1 p) Determina $\overline{P}$ dentro del condensador.

Problema 4 (2 p)

Se tiene una esfera hueca de un material polarizable. Se sabe que $\overline{P}$ es nula si $r < a$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, y que es igual a $\overline{1}x P_0$ (P_0 es una constante) si $a < r < b$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

a) (2 p) Determina las densidades de carga equivalente de polarización.
b) (1 p, opcional) Explica de cuáles coordenadas depende el campo eléctrico producido por $\overline{P}$.

¡ÉXITO!

EC1311 TEORIA ELECTROMAGNETICA

SOLUCION AL EXAMEN DEL 09/11/2009

PROBLEMA 1 (9 p)

a) (2p)

$$I_{fuente} = \int_L \bar{K}\cdot\bar{I}_z\, dl = \int_0^{2\pi} K_o\, \rho\, d\phi \Big|_{\rho=a} = 2\pi a K_o$$

Como el conductor es homogéneo, la corriente se distribuye uniformemente. Como hay un solo conductor volumétrico (volumen $a<\rho\leq b$), toda la corriente de la fuente pasa por él. Entonces

$$\bar{J}_c = -\bar{I}_z \frac{I_{fuente}}{Area} = -\bar{I}_z \frac{2\pi a K_o}{\pi(b^2-a^2)} = -\bar{I}_z \frac{2aK_o}{b^2-a^2}$$

b) (5p)

Dentro del sistema, $\bar{H}$ no depende de ϕ ni de z porque no se observan cambios en la corriente al variar esas coordenadas. En cambio, $\bar{H}$ sí depende de ρ porque sólo existe $\bar{J}_c$ en $a<\rho\leq b$. Por Ley de Gauss cuando $H=\bar{H}(\rho)$, $H_\rho(\rho)=0$. Por regla de la mano derecha, $\bar{H}$ no es paralelo a $\bar{J}$, luego $H_z=0$.

Finalmente $\bar{H} = \bar{I}_\phi H_\phi(\rho)$.

Aplicando la Ley de Ampère:

$$\nabla\times\bar{H} = \bar{I}_z \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\phi) = \bar{J} = \begin{cases} \bar{0} & \text{si } 0<\rho<a \\ -\bar{I}_z\, 2aK_o/(b^2-a^2) & \text{si } a<\rho<b \end{cases}$$

Entonces:

$$\rho H_\phi = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0<\rho<a \\ -\dfrac{aK_o\rho^2}{b^2-a^2} + c_2 & \text{si } a<\rho<b \end{cases}$$

$$H_\phi = \begin{cases} \dfrac{c_1}{\rho} & \text{si } 0<\rho<a \\ -\dfrac{aK_o\rho}{b^2-a^2} + \dfrac{c_2}{\rho} & \text{si } a<\rho<b \end{cases}$$

Ahora se calculan las constantes

Como $\lim_{\rho\to 0} H_\phi \neq \infty$ (no hay I en el eje z), $c_1 = 0$

Aplicando condición de frontera en $\rho = a$

$$\bar{1}_\rho \times \left[\bar{H}\big|_{a^+} - \bar{H}\big|_{a^-} \right] = \bar{K}\big|_a = K_o \bar{1}_z$$

De aquí: $-\dfrac{a^2 K_o}{b^2-a^2} + \dfrac{c_2}{a} = K_o \Rightarrow c_2 = aK_o + \dfrac{a^3 K_o}{b^2-a^2}$

$$c_2 = aK_o\left(1 + \frac{a^2}{b^2-a^2}\right) = \frac{aK_o b^2}{b^2-a^2}$$

$$\bar{H} = \begin{cases} \bar{0} & \text{si } \rho < a \\ \bar{1}_\phi \dfrac{aK_o}{b^2-a^2}\left(\dfrac{b^2}{\rho} - \rho\right) & \text{si } a<\rho<b \end{cases}$$

c) (2p) Aplicando condiciones de frontera:

En $z=0$:

$$\bar{K} = \bar{1}_z \times \left[\bar{H}\big|_{0^+} - \cancel{\bar{H}\big|_{0^-}}^{\,\bar{0}} \right] = \begin{cases} \bar{0} & \text{si } \rho<a \\ -\bar{1}_\rho \dfrac{aK_o}{b^2-a^2}\left(\dfrac{b^2}{\rho}-\rho\right) & \text{si } a<\rho<b \end{cases}$$

En $z=d$:

$$\bar{K} = \bar{1}_z \times \left[\cancel{\bar{H}\big|_{d^+}}^{\,\bar{0}} - \bar{H}\big|_{d^-} \right] = \begin{cases} \bar{0} & \text{si } \rho<a \\ \bar{1}_\rho \dfrac{aK_o}{b^2-a^2}\left(\dfrac{b^2}{\rho}-\rho\right) & \text{si } a<\rho<b \end{cases}$$

PROBLEMA 2 (6p)

a) (3p) Densidades de corriente equivalente:

$$\bar{J}_a = \nabla\times\bar{M} = \bar{1}_z \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho M_\phi) = \bar{0} \quad \text{(dentro del toroide)}$$

$\bar{K}_a = \bar{1}_n \times \left[\bar{M}\big|_{s^+} - \bar{M}\big|_{s^-} \right]$: Debe aplicarse en cada cara del toroide

En $\rho=a$, $0<z<a$: $\bar{K}a = \bar{1}_\rho \times [\bar{M}|_{a^+} - \cancel{\bar{M}|_{a^-}}^{\bar{0}}] = \bar{1}_z M_o$

En $\rho=b$, $0<z<a$: $\bar{K}a = \bar{1}_\rho \times [\cancel{\bar{M}|_{b^+}}^{\bar{0}} - \bar{M}|_{b^-}] = -\bar{1}_z M_o\left(\frac{a}{b}\right)$

En $z=0$, $a<\rho<b$: $\bar{K}a = \bar{1}_z \times [\bar{M}|_{0^+} - \cancel{\bar{M}|_{0^-}}^{\bar{0}}] = -\bar{1}_\rho M_o(a/\rho)$

En $z=a$, $a<\rho<b$: $\bar{K}a = \bar{1}_z \times [\cancel{\bar{M}|_{a^+}}^{\bar{0}} - \bar{M}|_{a^-}] = \bar{1}_\rho M_o(a/\rho)$

b) (3 p)

Dentro del toroide, $\bar{H}$ no depende de ϕ ni de z porque no se observan cambios en las corrientes al variar estas coordenadas, $\bar{H}$ sí depende de ρ porque $\bar{K}a$ depende de ρ en $z=0$ y $z=a$. Entonces $\bar{H} = \bar{H}(\rho)$

Por Ley de Gauss cuando $\bar{H}=\bar{H}(\rho)$, $H_\rho(\rho)=0$. Por regla de la mano derecha, $H_z(\rho)=0$ y queda $\bar{H} = \bar{1}_\phi H_\phi(\rho)$.

Aplicando Ley de Ampère:

$$\nabla \times \bar{H}_a = \bar{J}_a = \bar{0} = \bar{1}_z \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\phi) \Rightarrow \rho H_\phi = C \Rightarrow H_\phi = \frac{C}{\rho}$$

Para calcular C se aplica condición de frontera en cualquiera de las superficies. En $\rho=a$:

$$\bar{1}_\rho \times [\bar{H}a|_{a^+} - \cancel{\bar{H}a|_{a^-}}^{\bar{0}}] = \bar{K}a|_a = \bar{1}_z M_o$$

NOTA: $\bar{H}a$ es nulo fuera del toroide

De aquí se obtiene $c_1/a = M_o \Rightarrow c_1 = a M_o$

$\bar{H}a = \bar{1}_\phi\, a M_o/\rho$ dentro del toroide

PROBLEMA 3 (8 p)

a) (5 p) Como las placas son infinitas en x y en y, y además ϵ no depende de estas coordenadas, $\bar{E}$ no depende de x ni de y. $\bar{E}$ depende de z por geometría de las placas y ϵ.

Por simetría rotacional / Ley de Faraday, $E_x = E_y = 0$. Entonces $\bar{E} = E_z(z)\bar{1}_z$, por lo que también $\bar{D} = D_z(z)\bar{1}_z$.

Aplicando Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v = 0 \text{ (por ser aislante)}$$

Resolviendo:

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow D_z = C_1 \quad si \quad 0<z<a$$

NOTA: $\bar{D}$ y $\bar{E}$ son nulos fuera del condensador porque las placas son infinitas

Para calcular C_1 se aplica definición de diferencia de potencial.
Suponiendo que la placa de $z=0$ está a 0 V:

$$V = -\int_0^d \bar{E}\cdot \bar{dz} = -\int_0^a \frac{D_z(z)}{\epsilon}\,dz = -\int_0^{a/2} \frac{C_1}{2\epsilon_0}\,dz - \int_{a/2}^{a} \frac{C_1}{4\epsilon_0 z/a}\,dz$$

Entonces:

$$V = -C_1\left[\frac{a}{4\epsilon_0} + \frac{a}{4\epsilon_0}\ln 2\right] \Rightarrow C_1 = -\frac{4\epsilon_0 V}{a(1+\ln 2)}$$

Luego:

$$\bar{D} = -\bar{1}_z \frac{4\epsilon_0 V}{a(1+\ln 2)}$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\epsilon} = \begin{cases} -\bar{1}_z\, 2V/[a(1+\ln 2)] & si \quad 0<z<a/2 \\ -\bar{1}_z\, V/[z(1+\ln 2)] & si \quad a/2<z<a \end{cases}$$

b) (2 p)

La capacitancia es:

$$C = \frac{Q^+_{libre}}{V}$$

Q^+_{libre} está en la placa metálica ubicada en $z=a$

$$Q^+_{libre} = \int_S \eta(a)\,da$$

Para hallar $\eta(a)$ se aplica condición de frontera:

$$\eta(a) = \bar{1}_z \cdot \left[\cancel{\bar{D}|_{a^+}}^{\,0} - \bar{D}|_{a^-}\right] = \frac{4\epsilon_0 V}{a(1+\ln 2)}$$

Entonces $Q^+_{libre} = \dfrac{4\epsilon_0 V}{a(1+\ln 2)} \cdot$ Area

La capacitancia por unidad de área es: $\dfrac{C}{A} = \dfrac{4\epsilon_0}{a(1+\ln 2)}$

EC1311 / Solución al examen 09/11/09

c) (1p)

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \Rightarrow \bar{P} = \bar{D} - \epsilon_0 \bar{E}$$

$$\bar{P} = \begin{cases} -\bar{1}_z \dfrac{2\epsilon_0 V}{a(1+\ln 2)}, & \text{si } 0<z<a/2 \\ -\bar{1}_z \dfrac{\epsilon_0 V}{1+\ln 2}\left(\dfrac{4}{a} - \dfrac{1}{z}\right)\bar{1}_z, & \text{si } a/2<z<a \end{cases}$$

PROBLEMA 4 (2p)

a) (2p) Hay que calcular ρ_P y η_p

$$\rho_P = -\nabla \cdot \bar{P} = -\nabla \cdot (\bar{1}_x P_o) = 0$$

η_p puede existir en $r=a$ y en $r=a$

En $r=a$:

$$\eta_p = -\bar{1}_r \cdot [\bar{P}|_{a^+} - \cancelto{\bar{0}}{\bar{P}|_{a^-}}] = -\bar{1}_r \cdot \bar{1}_x P_o$$

Según el formulario, $\bar{1}_r \cdot \bar{1}_x = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$

Entonces: $\eta_p(a) = -P_o \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$

En $r=b$:

$$\eta_p = -\bar{1}_r \cdot [\cancelto{\bar{0}}{\bar{P}|_{b^+}} - \bar{P}|_{b^-}] = \bar{1}_r \cdot \bar{1}_x P_o$$

$$\eta_p(b) = P_o \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$$

b) (1p, OPCIONAL)

Como las densidades de carga η_p dependen de θ y de φ, $\bar{E}$ también depende de θ y de φ. Dado que las η_p están ubicadas en valores específicos de r, $\bar{E}$ depende de r. Entonces $\bar{E} = \bar{E}(r,\theta,\varphi)$